MATHEMATIQUES II

Durée : 4 heures

On note I l'intervalle [0, 1] de **R** et on désigne par $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions continues de I dans **R**, et par $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des fonctions polynômiales à coefficients réels, de degré au plus égal à $n \in \mathbf{N}$, définies sur I. (On identifie $\mathcal{P}_0$ et **R**.)

Pour tout $f \in \mathcal{C}$ on pose $\|f\| = \sup_{x \in I} |f(x)|$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $E_n(f) = \inf_{p \in \mathcal{P}_n} \|f-p\|$. On appelle *meilleure approximation* (en abrégé : m.a.) *d'ordre* n de f tout $p \in \mathcal{P}_n$ tel que $\|f-p\| = E_n(f)$.

I

1° Pour $f \in \mathcal{C}$ on pose $M = M(f) = \sup_{x \in I} f(x)$ et $m = m(f) = \inf_{x \in I} f(x)$.

a. Prouver que $\|f - \frac{1}{2}(M+m)\| \leqslant \frac{1}{2}(M-m)$. On pourra considérer les cas $m \leqslant f(x) \leqslant \frac{M+m}{2}$ et $\frac{M+m}{2} \leqslant f(x) \leqslant M$.

b. Établir que, pour tout réel $\alpha \neq \frac{1}{2}(M+m)$ on a

$$\|f-\alpha\| > \frac{1}{2}(M-m).$$

On pourra introduire x_1, x_2 appartenant à I tels que $f(x_1) = M$, $f(x_2) = m$.

c. Montrer que $E_0(f) = \frac{M-m}{2}$ et montrer l'existence d'une unique m.a. d'ordre 0 de f, que l'on précisera.

2° Soit $f \in \mathcal{C}$ une fonction munie d'une dérivée continue sur I et telle que $f''(x)$ existe et soit strictement positif pour tout $x \in]0, 1[$.

Pour $a \in \mathbf{R}$, on désigne par f_a la fonction définie sur I par $f_a(x) = f(x) - ax$ et on pose $M_a = M(f_a)$, $m_a = m(f_a)$ et $\Delta(a) = M_a - m_a$.

Pour $(a, t) \in \mathbf{R} \times I$, on pose $\delta(a, t) = f_a(t) - f(0)$.

Enfin on note $a_0 = f(1) - f(0)$.

a. Montrer que $f'(0) < a_0 < f'(1)$.

b. Établir que

$$\Delta(a) = \begin{cases} \delta(a, 1) & \text{si } a \leqslant f'(0), \\ \sup [0, \delta(a, 1)] - \delta(a, [f']^{-1}(a)) & \text{si } f'(0) < a < f'(1), \\ -\delta(a, 1) & \text{si } a \geqslant f'(1). \end{cases}$$

c. Prouver que la fonction Δ est continue sur **R** et dérivable en tout $a \neq a_0$. On montrera en particulier que

$$\Delta'(a) = \begin{cases} [f']^{-1}(a) - 1 & \text{si } f'(0) \leqslant a < a_0, \\ [f']^{-1}(a) & \text{si } a_0 < a \leqslant f'(1). \end{cases}$$

En déduire que $\Delta(a)$ est minimum pour $a = a_0$.

d. Démontrer que $E_1(f) = \frac{1}{2}\Delta(a_0)$ (utiliser 1) et que la fonction polynômiale $p \in \mathcal{P}_1$ définie par

$$p(x) = a_0 x + \frac{1}{2}(M_{a_0} + m_{a_0})$$

est la seule m.a. d'ordre 1 de f.

e. Expliciter les résultats de *d)* en faisant intervenir l'unique élément c de I vérifiant $f'(c) = a_0$.

Appliquer ces formules à la fonction définie sur I par $x \to x^4$.

.../...

II

On dit que $f \in \mathcal{C}$ est *n-alternée* s'il existe une suite finie $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de I, strictement croissante, telle que

$$|f(x_i)| = \|f\| \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$
$$\text{et} \quad f(x_i) = -f(x_{i+1}) \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

1° Montrer que les fonctions f considérées en I, 1°) (resp. I, 2°) et leur m.a. d'ordre 0 (resp. 1), p, sont telles que $f - p$ soit 2-alternée (resp. 3-alternée).

On admettra que, pour chaque $n \in \mathbf{N}$, tout $f \in \mathcal{C}$ admet une m.a. d'ordre n, et que $p \in \mathcal{P}_n$ est m.a. d'ordre n de f si et seulement si $f - p$ est $(n+2)$-alternée.

2° Soit $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n+2}$ une suite finie de I, strictement croissante, où $n \in \mathbf{N}$.

a. Montrer qu'il existe des constantes réelles b_i pour $i = 1, 2, \ldots, n+2$, non toutes nulles, telles que, pour tout $p \in \mathcal{P}_n$, on ait $\sum_{i=1}^{n+2} b_i p(x_i) = 0$.

b. En appliquant cette relation à des fonctions polynômiales p_k du type

$$p_k(x) = (x - x_1) \ldots (x - x_{k-1}) \ (x - x_{k+2}) \ldots (x - x_{n+2}),$$

montrer qu'aucun des b_i n'est nul et que

$$b_i \, b_{i+1} < 0 \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \ldots, n+1.$$

En déduire qu'il existe une suite $(C_i)_{1 \leqslant i \leqslant n+2}$ de réels strictement positifs tels que, pour tout $p \in \mathcal{P}_n$, on ait

$$\sum_{i=1}^{n+2} (-1)^{i+1} \, C_i \, p(x_i) = 0.$$

c. Soit $p \in \mathcal{P}_n$ tel que $(-1)^{i+1} p(x_i)$ soit positif ou nul pour $i = 1, 2, \ldots, n+2$. Démontrer que $p = 0$.

3° Soit $f \in \mathcal{C}$ et soient p_1 et p_2 des m.a. d'ordre n de f. En faisant intervenir une suite finie convenable de I, établir que $p_1 = p_2$. Conclusion.

4° Montrer que, si $f \in \mathcal{C}$ est $(n+2)$-alternée, on a

$$E_i(f) = \|f\| \quad \text{pour} \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

5° Pour chaque $n \in \mathbf{N}$ on considère la fonction T_n définie sur $[-1, +1]$ par $T_n(x) = \cos(n \operatorname{Arc\,cos} x)$.

a. Montrer que $T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2x \, T_n(x)$ pour tout $x \in [-1, +1]$ et tout entier $n \geqslant 1$.

En déduire que T_n est une fonction polynômiale de degré n dont le terme de plus haut degré a pour coefficient 2^{n-1} si $n \geqslant 1$.

b. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit $\tau_n \in \mathcal{C}$ par $\tau_n(x) = T_n(2x - 1)$.

Établir que τ_n est $(n+1)$-alternée.

c. En déduire que $E_{n-1}(p_n) = \dfrac{1}{2^{2n-1}}$, où p_n est la fonction définie sur I par $p_n(x) = x^n$.

Prouver que, quels que soient la fonction polynômiale et l'intervalle considérés,

$$\sup_{x \in [\alpha, \beta]} \left| \sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i} \right| \geqslant |a_0| \, \frac{(\beta - \alpha)^n}{2^{2n-1}}.$$

---

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail